Unele aspecte metodice asupra predării noţiunii de vector în liceu

Steluţa Monea [1] & Mihai Monea [2]

REZUMAT. Acest material exprimă opinia autorilor în legătură cu noţiunea descrisă în titlu. Este un material cu caracter didactic care poate reprezenta un punct de plecare spre o discuţie mai profundă.

[1] – profesor, Colegiul Naţional DECEBAL, Deva, smmonea@yahoo.com
[2] – profesor, Colegiul Naţional DECEBAL, Deva, mihaimonea@yahoo.com

Introducere

Începând cu anul şcolar 1999-2000, s-a reintrodus studiul vectorilor în cadrul programei de matematică din clasa a IX-a. Ulterior, prin programa şcolară din 2004 [19] şi apoi cea din 2009 [20] s-a dorit clarificarea acestei teme în ceea ce priveşte conţinuturile. Scopul acestei note este de a prezenta unele aspecte legate de acestă temă. Sunt elemente pozitive, dar şi negative, precum şi unele propuneri. Toate acestea sunt adunate după 20 de ani de activitate didactică desfăşurată exclusiv la catedră.

Scurt istoric

Geometria vectorială a mai fost studiată în liceele din România înainte de 1980. Motivele au fost foarte clare şi erau legate de dezvoltarea industrială a ţării. În acel context, politica educaţională a acelor vremuri avea scop principal pregătirea unor specialişti pentru industrie. Prin urmare au fost adaptate şi programele şcolare acestui demers.

Deoarece la majoritatea instituţiilor universitare cu caracter politehnic, admiterea se realiza pe baza unor teste scrise, de obicei dificile, din matematică şi fizică, s-a considerat că noţiunea de vectori trebuie studiată şi la matematică pentru a fi aplicată apoi mai uşor la unele capitole din fizică. Nu dorim să apreciem dacă deciziile de atunci au fost bune sau nu, dar este cert că aceste decizii erau justificate din punct de vedere economic. Profesorii de atunci au primit o importantă mână de ajutor pentru perfecţionarea activităţii didactice prin tipărirea, în limba română, a lucrării [10]. Ulterior, bibliografia a fost completată de unele realizări de valoare semnate Miron [12], Rusu[16] sau Simionescu [17], [18]. Ceva mai târziu apare şi lucrarea regretatului Brânzei [5], cu care se încheie acest capitol, deoarece, după 1980, această noţiune nu a mai fost studiată în cadrul orelor de matematică.

Anul şcolar 1999-2000 aduce schimbări importante în programa şcolară, consecinţe ale unei reforme demarate în 1997 şi neterminată nici în prezent. Începând cu acel an şcolar s-a reintrodus studiul vectorilor în matematica de liceu. Această decizie discutabilă a fost însoţită de una, absolut nejustificată, de eliminare a geometriei clasice din programa clasei a IX şi apoi a X-a.

Drept consecinţă, au apărut manuale noi, cum ar fi [3], [6], [7] sau [11]. Pe piaţă au apărut diferite lucrări de specialitate, cum ar fi [1] sau [2]. Anumite aspecte legate de noţiunea de vectori se găsesc şi în [14] sau [9].

Profesorii din sistemul preuniversitar au încercat să îşi formeze un demers didactic cât mai solid, în ciuda unei programe şcolare ambigue şi neclare. Unii, mai curajoşi, si-au expus public ideile prin unele lucrări cum ar fi [4], [8] sau [14]. Din păcate au apărut pe piaţă şi multe lucrări nereuşite, mai ales la nivelul auxiliarelor şcolare. Majoritatea conţin aceleaşi probleme preluate din lucrările mai vechi, fără a le grupa după vreun criteriu didactic.

Autorii acestei note au analizat toate aceste lucrări şi, ţinând cont de programă, au încercat să îşi realizeze propriul demers didactic pe care l-au expus în [13].

Însă, din discuţiile avute cu unii colegi mai tineri, se constată cu tristeţe că această temă continuă să fie neclară. Din acest motiv vom prezentaa în continuare unele aspecte.

Aspecte negative

Primul aspect negativ este cel legat de programa şcolară. Vom detalia având ca bază de discuţii programa pentru clasa a IX-a M1, din 2009. Programa şcolară nu este clară deloc. Nu este limpede ce dorim să facem cu noţiunea de vector şi cât de mult să o detaliem. Sesizăm un amestec nereuşit de rigurozitate excesivă şi irelevanţă. Dacă noţiunea de vector este introdusă foarte riguros, folosind inclusiv relaţii de echivalentă, iar adunarea vectorilor este studiată cu amănunte, inclusiv faptul că este corect definită, finalul este reprezentat de teoremele lui Menelaos sau Ceva, a căror demonstraţii vectoriale sunt mult mai dificile decât cele clasice.

De asemenea, programa şcolară nu are nici o viziune. Temele propuse pentru a fi predate elevilor sunt puţin haotice, fiind amestecate elemente de geometrie euclidiană, vectorială şi analitică. Elevul nu îşi poate forma nişte deprinderi de calcul, deoarece temele alternează fără vreo legătură. Astfel întâlnim operaţii cu vectori, apoi vectori de poziţie, teorema bisectoarei, relaţia lui Sylvester şi concurenţa înălţimilor.

Un alt aspect este legat de rezultatele teoretice pe care le considerăm cunoscute pentru a putea fi folosite fără demostraţie în examene. Practic regula paralelogramului şi regula triunghiului sunt singurele unanim acceptate. Ilustrăm cu două exemple din variantele propuse în 2009 pentru examenul de Bacalaureat.

Problema 1.1. *Notăm cu O, centrul triunghiului echilateral ABC. Demonstraţi că*

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}.$$

Un elev serios ştie că, în orice triunghi ABC, centru de greutate G verifică relaţia $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Dacă problema ar fi dată la examen, acest elev ar fi scris relaţia menţionată şi apoi ar fi completat cu faptul că $O=G$, în cazul triunghiului echilateral.

Problema 1.2. *Punctul M este poziţionat pe latura (BC) a triunghiului ABC astfel încât $CP=2BP$. Demonstraţi că*

$$3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}.$$

Una dintre relaţiile importante este cea legată de punctul care împarte un segment într-un raport dat. Dacă $P\in(BC)$ astfel încât $\dfrac{PC}{PB}=k\in(0,\infty)$ atunci

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AB}}{1+k},$$

pentru orice punct A. Pentru cazul $k = 2$, obţinem relaţia cerută.

Atunci se naşte întrebarea: *Ce facem la examenul de Bacalureat cu astfel de rezolvări? Cum le evaluăm?.* Corect ar fi, să se elaboreze subiecte care să elimine astfel de situaţii. Răspunsul s-a dat ulterior prin propunerea unor subiecte absolut minimalistice, dar care au născut întrebarea: *Pentru ce studiem vectorii?*

Aceasta din urmă este de fapt marea problemă. Manualele sau culegerile din prezent conţin suficiente exerciţii sau probleme care modelează algebric unele proprietăţi geometrice cunoscute, cum ar fi următoarele exemple:

Problema 1.3. *Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Dacă notăm cu M mijlocul laturii $[BC]$, determinaţi valoarea numărului real α pentru care*

$$\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GM} = \vec{0}.$$

Problema 1.4. *Fie $ABCD$ un paralelogram de centru O. Demonstraţi că*

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

Aceste exemple sunt utile pentru a forma deprinderi de calcul vectorial, dar nu sunt relevante. Elevul va rămâne cu impresia că s-au compus exerciţii pentru a justifica tema, fără a se atinge fondul problemei. Totuşi, în unele manuale găsim încercări de a demonstra utilitatea metodei vectoriale în studiul geometriei, dar exemplele nu sunt neapărat relevante.

Din nefericire găsim şi unele erori grave. În unul dintre manuale, cu largă răspândire, găsim demonstraţia vectorială a teoremei lui Thales. Este un aspect negativ important, deoarece această teoremă este folosită pentru a demonstra distributivitatea operaţiei de înmulţire cu scalar în raport cu adunarea vectorilor. Este cam acelaşi lucru cu a calcula $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{x}$ cu regula lui l'Hospital, în condiţiile în care acestă limită este folosită pentru determinarea derivatei sinusului.

Apectele legate de programă trebuie corectate de către minister. Până atunci, fiecare profesor trebuie să îşi formeze un demers didactic care să elimine erorile şi irelevanţa.

Aspecte pozitive

Dacă tot studiem vectorii, atunci trebuie să punem în evidenţă partea utilă. În demersul didactic, trebuie prezentate acele situaţii în care vectorii sunt mai eficienţi decât metodele clasice. În principiu avem două cazuri.

Prima situaţie este aceea în care rezolvarea vectorială este mult mai scurtă decât cea clasică. Iată câteva exemple.

Problema 2.1. *Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ astfel încât $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$. Demonstraţi că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.*

Demonstraţie. Notăm cu k valoarea comună a celor trei rapoarte din ipoteză. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Avem $\overrightarrow{GM} = \frac{\overrightarrow{GB} + k\overrightarrow{GC}}{1+k}$, $\overrightarrow{GN} = \frac{\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GA}}{1+k}$, respectiv $\overrightarrow{GP} = \frac{\overrightarrow{GA} + k\overrightarrow{GB}}{1+k}$. Fie G' centrul de greutate al triunghiului MNP. Atunci

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GG'} &= \frac{\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP}}{3} = \frac{\frac{\overrightarrow{GB}+k\overrightarrow{GC}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{GC}+k\overrightarrow{GA}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{GA}+k\overrightarrow{GB}}{1+k}}{3} \\ &= \frac{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}{3} = \vec{0},\end{aligned}$$

de unde obţinem $G' = G$. □

Problema 2.2. *Fie trapezul $ABCD$ având $AB||CD$ şi punctele $E \in (AD)$, respectiv $F \in (BC)$ astfel încât $EF||AB$. Demonstraţi că*

$$\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC}.$$

Demonstraţie. Notăm $\frac{EA}{ED} = x$ şi $\frac{FB}{FC} = y$. Avem

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$$

şi

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -x\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{CF}.$$

Înmulţim prima relaţie cu x şi o adunăm cu a doua. Obţinem

$$(1+x)\,\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + (x-y)\,\overrightarrow{CF}.$$

Vectorul $\overrightarrow{CF}$, având direcţie diferită de a celorlalţi trei din relaţie, trebuie să aibă coeficientul nul şi atunci $x = y$, de unde se deduce concluzia. □

Problema 2.3. *În patrulaterul $ABCD, G$ este centrul de greutate al triunghiului BCD, iar H ortocentrul triunghiului ACD. Demonstraţi că $ABGH$ este paralelogram dacă şi numai dacă G este centrul cercului circumscris triunghiului ACD.*

Demonstraţie. Fie O centrul cercului circumscris ADC. Atunci

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG},\end{aligned}$$

deci $O = G$. Reciproc, dacă centrul cercului circumscris triunghiului ADC este G, atunci, din relaţia lui Sylvester, avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GH} &= \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}\\ &= \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BA},\end{aligned}$$

adică $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{BA}$, deci $ABGH$ este paralelogram. $\square$

Problema 2.4. *Fie patrulaterul convex $ABCD$ şi M mijlocul laturii (CD). Dacă $AB = BC + AD$ şi $BM \perp AM$ atunci $BC || AD$.*

Demonstraţie. Avem

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}{2},$$

iar

$$\overrightarrow{BM}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}}{2}.$$

Dar $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ de unde obţinem

$$\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)=0$$

şi

$$\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)^2=\overrightarrow{AB}^2.$$

Atunci $AB^2 = AD^2+BC^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$. Din ipoteză avem $AB^2 = (AD+BC)^2$. Comparăm cele două relaţii şi obţinem $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = AD\cdot BC$, adică $\cos\measuredangle(AD, BC) = 0$ şi $BC||AD$. $\square$

Un alt aspect pozitiv este cel legat de faptul că metodele vectoriale pot oferi anumite abordări de tip algoritmic pentru teme cum ar fi perpendicularitatea, concurenţa sau coliniaritatea.

Problema 2.5. *Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (AC)$ astfel încât $\frac{MA}{AB} = k$, $\frac{NB}{BC} = l$ şi $\frac{PC}{AC} = m$. Demonstraţi că G, centrul de greutate al MNP, aparţine medianei din A dacă şi numai dacă $2l = m + k$.*

Demonstraţie. Prin calcul algebric avem $\frac{NB}{NC}=\frac{l}{1-l}$, $\frac{AP}{AC}=1-m$. Atunci

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}}{3}\\ &= \frac{k\overrightarrow{AB}+(1-m)\overrightarrow{AC}+(1-l)\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}}{3}\\ &= \frac{k+1-l}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{l+1-m}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Dacă $[AD]$ este mediană atunci

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}.$$

Punctele A, G, D sunt coliniare dacă şi numai dacă coeficienţii vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$, din relaţiile anterioare, sunt proporţionali, adică

$$\frac{k+1-l}{3} = \frac{l+1-m}{3},$$

de unde $2l = m + k$. □

Problema 2.6. *Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $\frac{DA}{DB} = \frac{CE}{EA}$. Demonstraţi că mijloacele segmentelor $(AB), (DE)$ şi (AC) sunt coliniare.*

Demonstraţie. Notăm $\frac{DA}{DB} = \frac{CE}{EA} = k$. Fie M mijlocul lui (AB), N mijlocul lui (AC), iar P mijlocul lui (DE). Atunci

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EA}}{2} + \overrightarrow{AM} \\
&= -\frac{k}{2(k+1)}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2(k+1)}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2(k+1)}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2(k+1)}\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{2(k+1)}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2(k+1)}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{k}{2(k+1)}\overrightarrow{AB} - \frac{k}{2(k+1)}\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Atunci $\overrightarrow{NP} = k\overrightarrow{PM}$, iar punctele M, P, N sunt coliniare. □

Problema 2.7. *Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$ şi O centrul cercului circumscris. Notăm cu H_A, H_B, H_C, H_D, ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB, respectiv ABC. Demonstraţi că dreptele AH_A, BH_B, CH_C, DH_D sunt concurente.*

Demonstraţie. Cele patru triunghiuri din enunţ au acelaşi centru al cercului circumscris. Avem

$$\overrightarrow{OH_A} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

Un punct Y aparţine dreptei AH_A dacă există un număr real y astfel încât

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OY} &= (1-y)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OH_A} \\
&= (1-y)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OD}.
\end{aligned}$$

Alegem $y = \frac{1}{2}$, din motive de simetrie, şi obţinem

$$\overrightarrow{OY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}.$$

Se verifică apartenenţa punctului determinat mai sus şi la dreptele BH_B, CH_C, DH_D. □

Un aspect pozitiv neexploatat este cel legat de problemele de geometrie în spaţiu. Sunt multe cazuri în care vectorii pot oferi soluţii mai eficiente. Următoarele exemple pot confirma acest fapt. Din nefericire, nu ne vom întâlni cu aceste situaţii prea curând deoarece geometria în spaţiu nu mai face parte din programa şcolară a claselor de liceu.

Problema 2.8. *Un plan taie muchiile VA, VB, VC ale piramidei triunghiulare $VABC$, respectiv în punctele M, N, P. Demonstraţi că centrul de greutate G al piramidei aparţine planului (MNP) dacă şi numai dacă*

$$\frac{MA}{MV} + \frac{NB}{NV} + \frac{PC}{PV} = 1.$$

Demonstraţie. Dacă notam cu a, b, c, valorile celor trei rapoarte din enunţ atunci vom avea $\overrightarrow{VM} = \frac{1}{a+1}\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VN} = \frac{1}{b+1}\overrightarrow{VB}$ şi $\overrightarrow{VP} = \frac{1}{c+1}\overrightarrow{VC}$. Dar $G \in (MNP)$ dacă există $x, y, z \in (0,1)$ cu $x + y + z = 1$, astfel încât

$$\overrightarrow{VG} = x\overrightarrow{VM} + y\overrightarrow{VN} + z\overrightarrow{VP}.$$

Obţinem

$$\overrightarrow{VG} = x\frac{1}{a+1}\overrightarrow{VA} + y\frac{1}{b+1}\overrightarrow{VB} + z\frac{1}{c+1}\overrightarrow{VC}.$$

Dar $\overrightarrow{VG} = \dfrac{\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC}}{4}$, de unde $x = \dfrac{a+1}{4}$, $y = \dfrac{b+1}{4}$ şi $z = \dfrac{c+1}{4}$. Prin adunare, obţinem

$$a + b + c = 1,$$

adică exact relaţia ce trebuia demonstrată. □

Problema 2.9. *Fie cubul $ABCDEFGH$. Demonstraţi că $AG \perp (BDE)$.*

Demonstraţie. Avem $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Atunci

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= -AB^2 + AD^2 = 0,\end{aligned}$$

deoarece celelalte produse care apar prin desfacerea parantezelor sunt nule. Apoi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DE} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\right) \\ &= AE^2 - AD^2 = 0.\end{aligned}$$

Atunci $AG \perp BD$ şi $AG \perp DE$, de unde obţinem $AG \perp (BDE)$. □

Pentru a putea pune corect şi complet în evidenţă metodele vectoriale ar trebui alocat mai mult timp orelor de geometrie din liceu.

Concluzii

După 18 ani de vectori, credem că situaţia actuală nu mai poate continua. Din păcate nu este singura problemă a programei de matematică. Opinia noastră este că sunt doar două variante.

Prima ar fi renunţarea totală la acestă temă ca în periada 1980-2000, dar poate nu este cea mai bună variantă. A doua variantă ar fi să se reintroducă geometria clasică plană şi în spaţiu, iar vectorii să reprezinte un capitol. Apoi să se aloce timp mai mult pentru formarea unor deprinderi de calcul. Ulterior să se prezinte elevilor metode vectoriale de rezolvare a problemelor de geometrie euclidiană. De asemenea ar trebui reintrodus studiul riguros al geometriei analitice, inclusiv tridimensionale, iar vectorii să fie din nou un capitol.

Nu spunem că avem obligatoriu dreptate, dar propuneri au tot fost făcute de-a lungul anilor fără ca factorii de decizie să reacţioneze. Să sperăm că generaţiile de elevi care vor veni vor avea parte de programe şcolare mai valoroase.

Bibliografie

[1] I.D. Albu, D. Bîrchi, *Geometrie vectorială în liceu*, Ed. Bîrchi, Timişoara, 2004.

[2] D. Andrica, C. Varga, D. Văcăreţu, *Teme şi probleme de geometrie*, Ed. Plus, Bucureşti, 2002.

[3] D. Andrica, E. Jecan, *Matematică. Manual pentru elevii clasei a IX-a*, Ed. Gil, Zalău, 2001.

[4] I. Besoiu, E. Besoiu E, *Probleme de geometrie rezolvate cu vectori*, Ed. Star Soft, Alba Iulia, 2000.

[5] D. Brânzei, *Geometrie circumstanţială*, Ed. Junimea, Iaşi, 1983.

[6] D. Brânzei, E. Radu, *Matematică. Manual pentru elevii clasei a IX-a*, Ed. Teora, Bucureşti, 1999.

[7] M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru elevii clasei a IX-a*, Ed. Carminis, Piteşti, 2004.

[8] M. Chiriţă, D. Gheorghiu, *Aplicaţii ale calculului vectorial în matematica de liceu*, Ed.Sigma, Bucureşti, 2001.

[9] P. Georgescu, G. Popa, *Structuri fundamentale în algebra liniară, geometria vectorială şi geometria analitică*, Ed. MatrixRom, Bucureşti, 2003.

[10] G. Girard, C. Thierce, *Geometrie*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[11] I.V. Maftei, C.P. Nicolescu, *Matematică. Manual pentru elevii clasei a IX-a*, Ed. Nedion, Bucureşti, 2004.

[12] R. Miron, *Introducere vectorială în geometria analitică plană*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

[13] M. Monea, *Probleme de geometrie euclidiană tratate prin metode vectoriale*, Lucrare metodico-ştiinţifică pentru obţinerea gradului didactic I, Univ. de Vest din Timişoara, 2005.

[14] V. Nicula, *Geometrie plană*, Ed. Gil, Zalău, 2002.

[15] Şt. Niţu, F. Niţu, *Vectori în gimnaziu şi liceu*, Ed. Optil Graphic, Craiova, 2003.

[16] E. Rusu, *Vectori*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1976.

[17] G. Simionescu, V. Ştefănescu, *Aplicaţii ale calculului vectorial în geometrie şi trigonometrie*, Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

[18] Gh. Simionescu, *Noţiuni de algebră vectorială şi aplicaţii în geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1977.

[19] ***, *Matematică, Programa şcolară pentru clasa a IX-a*, MECT, 2004.

[20] ***, *Matematică, Programa şcolară pentru clasa a IX-a*, MECI, 2009.