



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Județeană și a Municipiului București, 8 Martie 2014

CLASA a XII-a

Problema 1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm funcția $f_n : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f_n(x) = \arctg([x])$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x . Să se arate că f_n este integrabilă și să se determine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f_n(x) dx.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă și fie

$$s_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Să se arate că șirul $(s_{n+1} - s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent către $\int_0^1 f(x) dx$.

Problema 3. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea: oricare ar fi $x \in A$, $x + x^2 + x^3 = x^4 + x^5 + x^6$.

a) Să se arate că dacă $n \geq 2$ este un număr natural, $x \in A$ și $x^n = 0$, atunci $x = 0$.

b) Să se arate că $x^4 = x$, oricare ar fi $x \in A$.

Problema 4. Fie (G, \cdot) un grup care nu are elemente de ordin 4 și $f : G \rightarrow G$ un morfism de grupuri care are proprietatea $f(x) \in \{x, x^{-1}\}$, oricare ar fi $x \in G$. Să se arate că $f(x) = x$ oricare ar fi $x \in G$, sau $f(x) = x^{-1}$ oricare ar fi $x \in G$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.