



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 12 Martie 2011

CLASA a IX-a

Problema 1. Pe laturile AB , BC , CD , DA ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M , N , P , respectiv Q , astfel încât $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AC}$. Arătați că $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{DB}$.

Problema 2. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm mulțimea A_n a tuturor numerelor de forma $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n$; de exemplu, $A_2 = \{-3, -1, 1, 3\}$ și $A_3 = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$. Determinați numărul elementelor mulțimii A_n .

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $f(f(x)) = [x]$, oricare ar fi numărul real x . Arătați că există numerele reale distincte a și b astfel încât $|f(a) - f(b)| \geq |a - b|$.

Notă. $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Problema 4. Considerăm un număr real nenul a cu proprietatea că $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 1$. Arătați că $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = 1$, oricare ar fi numărul natural nenul n .

Notă. $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .